

文章编号: 100028055(2010) 082185205

极少失效数据的可靠性评估和寿命预测

傅惠民, 岳晓蕊, 张勇波
(北京航空航天大学 小样本技术研究中心, 北京 100191)

摘 要: 针对高可靠性产品寿命试验中经常出现只有极少失效数据的情况, 提出一种可靠性评估和寿命预测方法. 在 Weibull 分布形状参数下限已知的情况下, 给出使用寿命和可靠度的单侧置信下限, 该方法具有能将所有失效数据和未失效寿命数据进行累加的优点. 文中还建立不同状态之间不完全数据的损伤等效折算公式, 实现不同状态之间不完全数据的整体推断, 增大了信息量, 提高了预测精度. 本文方法易于计算, 便于工程应用.

关 键 词: 寿命试验; Weibull 分布; 极少失效数据; 整体推断; 可靠性评估; 寿命预测

中图分类号: O211; TB301 文献标识码: A

Reliability assessment and life prediction for very few failure data

FU Hu2min, YUE Xiao2rui, ZHANG Yong2bo

(Research Center of Small Sample Technology,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Aiming at the very few failure data which was usually found in life test of high reliability product, a method of reliability assessment and life prediction was put forward. The one2side lower confidence limits of the service life and reliability were derived under the condition of knowing the lower limit of shape parameter of Weibull distribution. It has the merit of that all the failure data and suspension data can be accumulated. Further2more, the convert formula of the data among different states was established by the principle of damage equivalence. Thus, the data among different states can be analyzed together and the prediction precision is improved. The presented method is a practical approach with simple calculation and convenient application.

Key words: life test; Weibull distribution; very few failure data; integral inference; reliability assessment; life prediction

随着产品服役时间的延长和可靠性的提高, 在寿命试验中无失效数据或仅有极少试样发生失效的情况经常出现^[126], 工程上迫切需要建立能够根据无失效数据或极少失效数据对产品的可靠度和使用寿命进行评估的有效方法. 由于未失效数据往往是人为中止试验得到的, 它通常不包含寿命随机分布的正确信息, 所以当不完全数据中失效数据极少的时候, 对寿命分散性的估计误差较大. 鉴于工程中寿命的 Weibull 分布形状参数下限 Λ 已积累大量试验统计数据 (铝合金结构: $\Lambda=4$; 钛合金结构: $\Lambda=3$; 钢结构: $\Lambda=2.2$)^[7210], 文献[728]建立了无失效数据的可靠性评估和寿命预测方法, 本文进一步提出极少失效数据的可靠性评估和寿命预测方法, 给出满足工程要求的

使用寿命和可靠度的单侧置信下限.

1 Weibull 分布极少失效数据的寿命预测

Weibull 分布在工程中应用相当广泛. 大量工程实践表明, 产品寿命通常遵循 Weibull 分布

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{B}\right)^A\right] \quad (1)$$

式中 $A > 0$ 为形状参数, $B > 0$ 为特征寿命, 分布记为 $W(A, B)$.

设 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 为来自 Weibull 分布的一组不完全数据, 其中 r 个为失效数据, $n-r$ 个为未失效数据. 当形状参数 A 已知时, 可令

$$\begin{cases} z = t^A \\ H = B^A \end{cases} \quad (2)$$

则, 式(1)转化为

$$F(z) = 1 - \exp\left[-\frac{z}{H}\right] \quad (3)$$

即 $z = t^A$ 服从指数分布. 因此, 根据指数分布置信水平为 C 的可靠寿命单侧置信下限公式可知^[11], 对于 Weibull 分布随机变量 t , 当形状参数 A 已知时, 其给定可靠度 R 的可靠寿命 t_R 置信水平为 C 的单侧置信下限为

$$t_{Rlow} = \left[-\frac{2\ln R}{V_{1-C}^2(2r+2)} \frac{\sum_{i=1}^n t_i^A}{\sum_{i=1}^n t_i^A}\right]^{1/A} \quad (4)$$

式中 $V_{1-C}^2(2r+2)$ 是自由度为 $2r+2$ 的 χ^2 分布的 $1-C$ 上侧分位点, 即有

$$P\left\{t_R \leq t_{Rlow}\right\} = C \quad (5)$$

在工程实际中, 形状参数 A 通常是未知的, 因此无法根据式(4)求得可靠寿命置信下限, 但在许多情况下, 可以知道 A 大于等于某一常数 A_0 , 即形状参数下限 A_0 已知. 可以证明, 当给定的可靠度 R 满足

$$R \leq \exp\left[-\frac{V_{1-C}^2(2r+2)}{2} \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i^{A_0} \ln t_i^{A_0}}{\sum_{i=1}^n t_i^{A_0}} - \ln \sum_{i=1}^n t_i^{A_0}\right)\right] \quad (6)$$

时, 其可靠寿命 t_R 的置信水平为 C 的单侧置信下限为

$$t_{Rlow}^* = \left[-\frac{2\ln R}{V_{1-C}^2(2r+2)} \frac{\sum_{i=1}^n t_i^{A_0}}{\sum_{i=1}^n t_i^{A_0}}\right]^{1/A_0} \quad (7)$$

即

$$P\left\{t_R \leq t_{Rlow}^*\right\} \geq C \quad (8)$$

下面给出简单证明.

证明: 对式(4)进行对数变换, 并取关于 A 的偏导, 可得

$$\frac{5 \ln t_{Rlow}}{5A} = -\frac{1}{A} \#$$

$$\left\{ \ln\left[-\frac{2\ln R}{V_{1-C}^2(2r+2)}\right] + \ln\left[\frac{\sum_{i=1}^n t_i^A}{\sum_{i=1}^n t_i^A}\right] - \frac{\sum_{i=1}^n t_i^A \ln t_i^A}{\sum_{i=1}^n t_i^A} \right\}$$

由此可知, 当

$$\ln\left[-\frac{2\ln R}{V_{1-C}^2(2r+2)}\right] + \ln\left[\frac{\sum_{i=1}^n t_i^A}{\sum_{i=1}^n t_i^A}\right] \left[\frac{\sum_{i=1}^n t_i^A \ln t_i^A}{\sum_{i=1}^n t_i^A} \right]$$

即

$$R \leq \exp\left[-\frac{V_{1-C}^2(2r+2)}{2} \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i^A \ln t_i^A}{\sum_{i=1}^n t_i^A} - \ln \sum_{i=1}^n t_i^A\right)\right] \quad (9)$$

成立时, t_{Rlow} 为形状参数 A 的单调增函数, 因此, 当 $A \geq A_0$ 时有

$$t_{Rlow} = \left[-\frac{2\ln R}{V_{1-C}^2(2r+2)} \frac{\sum_{i=1}^n t_i^A}{\sum_{i=1}^n t_i^A}\right]^{1/A} \leq \left[-\frac{2\ln R}{V_{1-C}^2(2r+2)} \frac{\sum_{i=1}^n t_i^{A_0}}{\sum_{i=1}^n t_i^{A_0}}\right]^{1/A_0} = t_{Rlow}^* \quad (10)$$

即有

$$P\left\{t_R \leq t_{Rlow}^*\right\} \geq P\left\{t_R \leq t_{Rlow}\right\} = C \quad (11)$$

同样可以证明, 式(9)中不等式的右边为形状参数 A 的单调减函数. 因此, 当 $A \leq A_0$ 时, 式(6)成立, 式(9)也必然成立, 同样有式(10)和式(11)成立. 证毕!

2 Weibull 分布极少失效数据的可靠性评估

与第1节类似证明可知, 对于 Weibull 分布随机变量 t , 当形状参数 A 已知时, 其给定寿命 t 的可靠度 $R(t)$ 置信水平为 C 的单侧置信下限为

$$R_{low}(t) = \exp\left[-\frac{t^A V_{1-C}^2(2r+2)}{2 \sum_{i=1}^n t_i^A}\right] \quad (12)$$

同样, 虽然在工程上形状参数 A 通常是未知的, 但对于已知的常数 $A(A \setminus A_0)$, 可以证明, 当给定的寿命 t 满足

$$t \leq \exp \left[\frac{\sum_{i=1}^n t_i^{A_0} \ln t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^{A_0}} \right] \tag{13}$$

时, 可靠度 $R(t)$ 置信水平为 C 的单侧置信下限为

$$R_{low}^*(t) = \exp \left[- \frac{t^{A_0} V_{2r}^2 d(2r+2)}{2 \sum_{i=1}^n t_i^{A_0}} \right] \tag{14}$$

即有

$$P \left[R(t) \setminus R_{low}^*(t) \right] \leq C \tag{15}$$

3 不同状态之间不完全数据的整体推断方法

工程中经常需要在不同状态(如不同温度、压力、载荷等)下进行截尾试验. 通常单个状态下的试验数据极少, 若将不同状态之间的不完全数据进行损伤等效折算, 则可大大增加单个状态下的数据量, 实现不同状态之间不完全数据的整体推断.

3.1 各个状态下均只有一个失效数据的等效折算

设 $t_{i1} \leq t_{i2} \leq \dots \leq t_{in_i}$ 为来自第 i 个状态下 $W(A, B)$ 的一组不完全数据, 其中只有 t_{ir_i} ($1 \leq r_i \leq n_i$) 一个失效数据, 其余 $n_i - 1$ 个均为未失效数据, $i = 1, 2, \dots, m$. 根据累积失效概率等效的原则, 可以将第 i 个状态下第 j 个数据 t_{ij} 折算为第 k ($1 \leq k \leq m$) 个状态下的数据 $t_{k\alpha, j}$, 折算公式为

$$t_{k\alpha, j} = \left(\frac{n_k - r_k + 1}{n_i - r_i + 1} \right)^{1/A_0} \frac{t_{r_k}}{t_{r_i}} t_{ij} \tag{16}$$

$j = 1, 2, \dots, n_i$

3.2 各个状态下多个连续失效数据的等效折算

设不完全数据 $t_{i1} \leq t_{i2} \leq \dots \leq t_{in_i}$ 中有多个连续失效数据 $t_{ih_i} \leq t_{(h_i+1)} \leq \dots \leq t_{ir_i}$, 其余均为未失效数据, $1 \leq h_i < r_i \leq n_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. 根据累积失效概率等效的原则, 可以将第 i 个状态下第 j 个数据 t_{ij} 折算为第 k ($1 \leq k \leq m$) 个状态下的数据 $t_{k\alpha, j}$, 折算公式为

$$t_{k\alpha, j} = c_{k\alpha}^{1/A_0} \frac{t_{r_k}}{t_{r_i}} t_{ij} \tag{17}$$

$j = 1, 2, \dots, n_i$

式中

$$c_{k\alpha} = \frac{\sum_{l=h_i}^{s_i} (n_i - l + 1)^{-1}}{\sum_{l=h_k}^{s_k} (n_k - l + 1)^{-1}} \tag{18}$$

其中 s_i ($h_i \leq s_i \leq r_i$) 和 s_k ($h_k \leq s_k \leq r_k$) 的选择应使 $c_{k\alpha}$ 不大于 1, 且尽量接近于 1.

证明: 根据累积失效概率等效的原则^[12]: 产品在第 i 个状态下试验时间 t_{ij} 的累积失效概率 $F_i(t_{ij})$ 等于在第 k 个状态下试验时间 $t_{k\alpha, j}$ 的累积失效概率 $F_k(t_{k\alpha, j})$, 即

$$F_i(t_{ij}) = F_k(t_{k\alpha, j}) \tag{19}$$

由式(1)和式(19)可知

$$t_{k\alpha, j} = \frac{B}{B} t_{ij} \tag{20}$$

由于 B 和 B 未知, 工程中常用其估计值 $\hat{B}$ 和 $\hat{B}$ 代替, 得

$$t_{k\alpha, j} = \frac{\hat{B}}{\hat{B}} t_{ij} \tag{21}$$

令

$$Z_i = t_i^A \quad H = B^A \tag{22}$$

则 Z_i 服从均值为 H 的指数分布, 其第 s_i 个顺序统计量 Z_{is_i} 的均值为

$$E(Z_{is_i}) = H \sum_{l=h_i}^{s_i} (n_i - l + 1)^{-1} \tag{23}$$

$h_i \leq s_i \leq r_i$

由此可知

$$\hat{H} = \frac{Z_{is_i}}{\sum_{l=h_i}^{s_i} (n_i - l + 1)^{-1}} \tag{24}$$

$h_i \leq s_i \leq r_i$

为 H 的无偏估计量, 即

$$E(\hat{H}) = H \tag{25}$$

由式(24)和式(22)可知

$$\hat{B} = \left[\frac{t_{s_i}}{\sum_{l=h_i}^{s_i} (n_i - l + 1)^{-1}} \right]^{1/A} \tag{26}$$

$h_i \leq s_i \leq r_i$

将上式代入式(21)可得

$$t_{k2i,j} = \left[\frac{\sum_{l=1}^{s_i} (n_i - l + 1)^{-1}}{\sum_{l=1}^{s_k} (n_k - l + 1)^{-1}} \right]^{1/A} \frac{t_{ks,k}}{t_{is,i}} t_{ij} = c_{\Delta}^{1/A} \frac{t_{ks,k}}{t_{is,i}} t_{ij}$$

(27)

当 c_{Δ} 不大于 1 时, $c_{\Delta}^{1/A} \in [c_{\Delta i}^{1/A}, c_{\Delta i}^{1/A} (A \in A)]$, 因此将式(27)中 $c_{\Delta}^{1/A}$ 替换为 $c_{\Delta i}^{1/A}$ 所得的等效折算时间 $t_{k2i,j}$ 更为保守, 式(17)证毕!

将各个不同状态下的试验数据等效折算到第 k 个状态后, 再结合第 k 个状态原有数据, 采用本文前两节方法进行整体推断.

4 工程实例

表 1 给出了某型卫星推力器稳态连续点火试验结果, 其中仅有 1 台推力器发生失效, 其余 15 台均未做到失效即中止试验. 现要求在置信水平 $C = 60\%$ 下对该型卫星推力器 $t = 20\text{h}$ 稳态点火的可靠度进行评估.

表 1 某型卫星推力器稳态连续点火试验结果
Table 1 Results of steady continuous ignition test of some satellite engine

序号 i	稳态连续点火时间 t_i/h	是否发生 失效
1	> 12	否
2	> 40	否
3	> 40	否
4	> 40	否
5	> 40	否
6	> 40	否
7	> 46.6	否
8	63.6	是
9	> 20	否
10	> 12.3	否
11	> 20	否
12	> 20	否
13	> 20	否
14	> 50.8	否
15	> 48.3	否
16	> 40	否

根据工程经验, 该型卫星推力器寿命遵循 Weibull 分布, 其失效模式主要为燃烧室或喉管烧穿. 燃烧室和喉管所用材料为钛铌合金, 根据波音公司对大量钛合金结构试验数据的统计分析结果, 建议取 $A = 31.0$.

采用本文第 2 节方法对表 1 中数据进行处理, 得

$$\exp \left[\frac{\sum_{i=1}^n t_i^{\Delta} \ln t_i}{\sum_{i=1}^n t_i^{\Delta}} \right] = 46.82$$

因此, $t = 20 < 46.82$, 满足式(13)条件, 可以根据式(14)求得其置信水平为 60% 的可靠度单侧置信下限为

$$R_{\text{low}}^*(20) = \exp \left[- \frac{20^3 V_{0.4}^2(4)}{2 \sum_{i=1}^n t_i^3} \right] = 98.43\%$$

因此, 在置信水平 60% 下, 可以断定该型卫星推力器稳态连续工作 20h 小时的可靠度大于 98%.

5 结 论

- 1) 提出了极少失效数据可靠性评估和寿命预测方法, 该方法能够充分利用以往积累的大量试验统计数据, 确定 Weibull 分布形状参数下限, 给出使用寿命和可靠度的单侧置信下限.
- 2) 本文方法能将所有失效数据和未失效寿命数据进行累加, 从而提高可靠性分析精度.
- 3) 建立了不同状态之间寿命的损伤等效折算公式, 提出不同状态下不完全数据的整体推断方法, 增大了信息量, 提高了预测精度.

参考文献:

[1] 贺国芳. 可靠性数据的收集与分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.

[2] Nelson W. Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analyses[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2004

[3] Lawless J F. Statistical model and method for lifetime data [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1982.

[4] 韩明. 无失效数据的可靠性分析[M]. 北京: 中国统计出版社, 1999.

[5] 邴诗松, 王玲玲, 濮晓龙. 威布尔分布场合无失效数据的可靠性分析[J]. 应用概率统计, 1996, 12(1): 92107.

MAO Shisong, WANG Lingling, PU Xiaolong. Reliability analysis for Weibull zero failure data[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 1996, 12(1): 92107

(in Chinese)

[6] Mao S S, Chen J. Bayesian analysis of data with only one failure [J]. Applied Mathematics, 1996, 11 B 4352444.

[7] 傅惠民, 王凭慧. 无失效数据的可靠性评估和寿命预测 [J]. 机械强度, 2004, 26(3): 2602264
FU Huimin, WANG Pinghui. Reliability assessment and life prediction for zero failure data[J]. Journal of Mechanical Strength, 2004, 26(3): 2602264 (in Chinese)

[8] 王凭慧, 范本尧, 傅惠民. 卫星推力器可靠性评估和寿命预测[J]. 航空动力学报, 2004, 19(6): 7452748.
WANG Pinghui, FAN Benyao, FU Huimin. Reliability assessment and life prediction for satellite engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2004, 19(6): 7452748 (in Chinese)

[9] Whittaker I C, Besuner P M. A reliability analysis approach to fatigue life of aircraft structures [R]. AD 853263, April 1969

[10] Whittaker I C. Development of titanium and steel fatigue variability model for application of reliability analysis approach to aircraft structures[R]. AD 758219, October 1972

[11] 戴树森, 费鹤良, 王玲玲, 等. 可靠性试验及其统计分析: 下册[M]. 北京: 国防工业出版社, 1984

[12] 邝诗松, 王玲玲. 加速寿命试验[M]. 北京: 科学出版社, 1997.